

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
Математических методов исследования операций
Азарнова Т.В.
22.04.2022



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.23 Методы оптимизации

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.02 Прикладная математика и информатика

2 Профиль подготовки/специализация: все профили

3 Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

4.Форма обучения: очная

5.Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: математических методов исследования операций

6.Составители программы: Азарнова Т.В., д.т.н., профессор кафедры математических методов исследования операций

7.Рекомендована: НМС факультета Прикладной математики, информатики и механики
Протокол №8 от 15.04.2022.

8.Учебный год: 2024/2025 Семестр: 5,6

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью изучения дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков в области решения оптимизационных задач и развитие компетенций применения методов оптимизации в практической деятельности и в научных исследованиях.

Основными задачами изучения дисциплины являются следующие:

- изучить теоретические основы современных концепций и моделей оптимизации и математического моделирования;
- научить применению алгоритмов численных методов и основных инструментальных средств в области методов оптимизации для решения актуальных инженерных и экономических задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина Методы оптимизации относится к части блока Б1, обязательная часть. Для успешного освоения дисциплины необходимы знания дисциплин: «Математический анализ», «Дискретная математика», «Линейная алгебра».

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2.	ОПК-1.2 Осуществляет формализацию поставленной задачи и выбирает математические методы для ее решения.	<i>Знать:</i> принципы и методы: формирования и исследования математических моделей экстремальных задач; содержательной и формализованной постановки задач конечномерной и динамической оптимизации; теоретических основ и алгоритмов решения задач линейного, нелинейного программирования и оптимального управления; <i>Уметь:</i> применять принципы и методы построения математических моделей при решении прикладных задач; использовать базовые алгоритмы их решения; решать исследовательские и проектные задачи оптимизации с применением средств компьютерного моделирования; использовать инструментальные программные средства в процессе решения экстремальных задач <i>Владеть:</i> приемами формализации поставленной задачи, подбором наиболее адекватных методов оптимизации для их решения и применением инструментальных программных средств в процессе решения поставленных формализованных задач.
ОПК-2	Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов	ОПК-2.1.	ОПК-2.1. Выделяет основные направления адаптации методов решения прикладной задачи; реализует математические методы и	<i>Знать:</i> принципы и методы формализации прикладных задач в виде экстремальных задач; широкий спектр методов оптимизации для решения основных типов экстремальных задач; приближенные методы решения экстремальных задач; методы оценки качества решения экстремальных задач <i>Уметь:</i> применять принципы и методы построения математических моделей при решении прикладных задач; использовать

	решения прикладных задач		алгоритмы в форме компьютерных программ для проведения вычислительного эксперимента.	базовые алгоритмы их решения; решать исследовательские и проектные задачи оптимизации с применением средств компьютерного моделирования; использовать инструментальные программные средства в процессе решения экстремальных задач <i>Владеть:</i> приёмами реализации математических методов и алгоритмов линейной и нелинейной оптимизации в форме компьютерных программ для проведения вычислительного эксперимента.
ОПК-5	Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.1.	ОПК-5.1. Применяет фундаментальные знания для реализации математических методов и алгоритмов при решении прикладной задачи; осуществляет сравнение точности, сходимости и других характеристик вычислительных алгоритмов.	Знать: классические подходы к решению оптимизационных задач, а также современные тенденции и направления в научных исследованиях, проводимых в мире; знать численные алгоритмы решения экстремальных задач и методы оценки сходимости численных алгоритмов. Уметь: анализировать новые возникающие проблемы и находить пути их решения; исследовать и разрабатывать математические модели, методы и алгоритмы решения экстремальных задач; составлять вычислительные схемы алгоритмов решения сложных экстремальных задач. Владеть: базовым аппаратом использования численных методов для решения сложных экстремальных задач; аппаратом оценки различных характеристик численных методов решения экстремальных задач.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час (в соответствии с учебным планом) — 6/216

Форма промежуточной аттестации - зачет, экзамен

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)		По семестрам	
	Всего	В том числе в интерактивной форме	5 сем.	6 сем.	
Аудиторные занятия	96				
в том числе: лекции	48		16	32	
практические	32		16	16	
лабораторные	16		-	16	
Самостоятельная работа	84		40	44	
Форма промежуточной аттестации (зачет, экзамен)			зачет	экзамен	
Итого:	180		72	108	

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
-------	---------------------------------	-------------------------------

1	Введение, основные определения. Общая постановка задачи оптимизации	Примеры оптимизационных задач. Общая постановка проблемы. Целевая функция, допустимое множество. Оптимальные точки. Разные формы записи. Эквивалентный переход от одной записи к другой. Постановка задачи с помощью функции Лагранжа.
2	Необходимые и достаточные условия оптимальности.	Задачи с ограничениями – равенствами. Принцип Лагранжа. Расширенная функция Лагранжа. Эквивалентность теорем. Задачи с ограничениями – неравенствами. Использование классического принципа Лагранжа для получения необходимых условий экстремума. Задача общего вида. Определение седловой точки функции Лагранжа. Достаточное условие экстремума в терминах седловой точки. Задачи выпуклого программирования. Теоремы об отделимости множеств. Теорема Куна – Таккера. Дифференциальный вариант теоремы Куна-Таккера. Условие оптимальности Ф.Джона. Возможные и подходящие направления. Условие оптимальности в терминах возможных и подходящих направлений. Теорема Куна-Таккера в задачах с линейными ограничениями
3	Задачи линейного программирования	Постановка задачи. Каноническая форма записи. Двойственная задача. Свойства пары двойственных задач. Алгоритм симплексного метода. Решение произвольной задачи методом искусственного базиса. Т
4	Методы одномерной оптимизации	Методы, использующие свойство унимодальности функций – метод золотого сечения, метод деления отрезка пополам. Метод секущих, метод Ньютона.
5	Методы многомерной безусловной оптимизации	Метод покоординатной оптимизации. Методы градиентного спуска: - с постоянным шагом; - с дроблением шага; - метод наискорейшего спуска. Методы сопряженных направлений; - общая схема метода; - метод Пауэлла; - метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса; - метод Ньютона.
6	Методы условной оптимизации	Методы, использующие линеаризацию исходной задачи: - метод секущих плоскостей; - метод линеаризации. Методы возможных направлений: - общая схема Зойтендейка; - решение задач с линейными ограничениями. Методы штрафов – внешних и внутренних.
7	Задачи вариационного исчисления (ВИ)	Простейшая задача вариационного исчисления. Принцип вариации. Основная лемма ВИ. Уравнение Эйлера. Задача Больца. Необходимые условия слабого минимума. Задача Лагранжа. Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий слабого минимума. Задачи со старшими производными.
8	Задачи оптимального управления.	Постановка задачи. Основные определения. Элементарная задача оптимального управления. Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий экстремума. Принцип максимума Понтрягина.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Введение. Основные определения. Общая постановка задач оптимизации	4	2	-	8	14
2	Необходимые и достаточные условия оптимальности	10	4	-	20	34
3	Задачи линейного программирования	4	6	4	8	22
4	Одномерная оптимизация	4	2	2	4	12
5	Многомерная безусловная	6	8	5	14	33

	оптимизация					
6	Методы условной оптимизации	8	4	5	14	31
7	Вариационное исчисление	8	4	-	10	22
8	Оптимальное управление	4	2	-	6	12
	итого	48	32	16	84	180

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

При прохождении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и лабораторных занятий, и осуществляется контроль посещаемости и выполнения всех видов самостоятельной работы. В течение занятий студенты решают задачи, указанные преподавателем к каждому занятию.

В рамках самостоятельной работы осуществляется повторение теоретического материала, излагаемого в курсе Методы оптимизации при подготовке к проведению практических и лабораторных работ.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Крутиков, В. Н. Методы оптимизации : учебное пособие / В. Н. Крутиков, В. В. Мишечкин. — 2-е изд., доп и перераб. — Кемерово : КемГУ, 2019. — 106 с. — ISBN 978-5-8353-2437-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/135233
2	Прокопенко, Н. Ю. Методы оптимизации : учебное пособие / Н. Ю. Прокопенко. — Нижний Новгород : ННГАСУ, 2018. — 118 с. — ISBN 978-5-528-00287-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/164796
3	Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-1887-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168850
4	Ренин, С.В. Методы оптимизации : сборник / Н. Д. Ганелина; С.В. Ренин. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. — 54 с. — ISBN 978-5-7782-1688-4. — URL: https://rucont.ru/efd/205943

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	Кремлев, А. Г. Методы оптимизации / А. Г. Кремлев. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2012. — 193 с. — ISBN 978-5-7996-0738-8. — URL: https://rucont.ru/efd/209443
6	Методы оптимизации / Е.П. Белоусова, Т.И. Смагина. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. — 46 с. — URL: https://rucont.ru/efd/685297
7	Методы оптимизации : метод. указания / Н. В. Легков; Яросл. гос. ун-т. — Ярославль : ЯрГУ, 2008. — 34 с. — URL: https://rucont.ru/efd/207090
8	Рейзлин, В. И. Численные методы оптимизации : учеб. пособие / Томский политехн. ун-т; В. И. Рейзлин. — Томск : Изд-во ТПУ, 2013. — 112 с. — URL: https://rucont.ru/efd/278553
9	Кочегурова, Е. А. Теория и методы оптимизации : учеб. пособие / Томский политехн. ун-т; Е. А. Кочегурова. — Томск : Изд-во ТПУ, 2013. — 134 с. — ISBN 978-5-4387-0237-5. — URL: https://rucont.ru/efd/278540

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1	edu.vsu.ru
2	ЭБС Лань
3	ЭБС ЮРАИТ
5	ЭБС Rucont

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
-------	----------

1	Методы оптимизации и исследование операции / И.Д. Коструб .— Воронеж : Издательский дом Воронежского государственного университета, 2014 .— 119 с. — URL: https://rucont.ru/efd/294540
2	Розова, В. Н. Методы оптимизации : курс лекций: учеб. пособие / И. С. Максимова; В. Н. Розова .— Москва : РУДН, 2010 .— 113 с. — ISBN 978-5-209-03872-6 .— URL: https://rucont.ru/efd/221341

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

При реализации дисциплины используется классическая модель лекционных и практических занятий, могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети.

При проведении лабораторных занятий используются среды и языки программирования Pascal, Visual Studio, C/C++.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Лекционная аудитория должна быть оснащенной современным компьютером с подключенным к нему проектором с видеотерминала на настенный экран. Практические и лабораторные занятия должны проводиться в специализированной аудитории, оснащенной современными персональными компьютерами и программным обеспечением в соответствии с тематикой изучаемого материала. Предполагаемое оборудование для компьютерных классов: компьютеры в составе: системный блок: процесс Intel(R) Core(TM) i3-4160 CPU @ 3.60GHz, оперативная память 8Гб, HDD 500Гб, видеокарта NVIDIA GeForce GTX 750; монитор: Acer V226HQL; мультимедиа-проектор ViewSonic PA503W. Коммутатор HP ProCurve Switch 1400-24G; мультимедийная акустическая система SVEN SPS-702.

10.

19. Фонд оценочных средств:

19.1 Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

№	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1	Введение. Основные определения. Общая постановка задач оптимизации	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-2.1, ОПК-5.1	Устные опросы на лекциях и на практических занятиях
2	Необходимые и достаточные условия оптимальности	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-2.1, ОПК-5.1	Контрольная работа №1. Контрольная работа №2.
3	Задачи линейного программирования	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-2.1, ОПК-5.1	Контрольная работа №3. Контрольная работа №4. Контрольная работа №5
4	Одномерная оптимизация	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-2.1, ОПК-5.1	Контрольная работа №7. Лабораторная работа №1
5	Многомерная безусловная оптимизация	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-2.1, ОПК-5.1	Контрольная работа №8. Лабораторная работа №2

6	Методы условной оптимизации	ОПК-1, ОПК-5	ОПК-2,	ОПК-1.2, ОПК- 2.1, ОПК-5.1	Контрольная работа №9 Лабораторная работа №3
7	Вариационное исчисление	ОПК-1, ОПК-5	ОПК-2,	ОПК-1.2, ОПК- 2.1, ОПК-5.1	Контрольная работа №10
8	Оптимальное управление	ОПК-1, ОПК-5	ОПК-2,	ОПК-1.2, ОПК- 2.1, ОПК-5.1	Устный опрос на лекционных и практических занятиях

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Примеры контрольных работ

Пример контрольной работы 1

Решить графически задачи нелинейного программирования:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \text{extr} & |x_1 - 5| + x_2 \rightarrow \text{extr} \\
 \quad (x_1 - 2)(x_2 + 1) \leq 16, & 5x_1 + 3x_2 \leq 24, \\
 \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & 0 \leq x_1 \leq 3, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Пример контрольной работы 2

Решить с помощью необходимых и достаточных условий экстремума следующие задачи с ограничениями неравенствами:

1.

$$\begin{array}{l}
 (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min \\
 x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
 x_1 + x_2 \leq 5 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

2

$$\begin{array}{l}
 (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min \\
 x_1 + 4x_2 \leq 4 \\
 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

3

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

6

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

7

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$5x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

8

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

9

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

10

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

11

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

12

$$\begin{aligned}(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + x_2 &\leq 7 \\4x_1 + x_2 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + x_2 &\leq 5 \\4x_1 + x_2 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

15

$$\begin{aligned}(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\4x_1 + x_2 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + x_2 &\leq 7 \\3x_1 + x_2 &\leq 9 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

17

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 + 5)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

18

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

19

$$\begin{aligned}
(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\
x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\
5x_1 + x_2 &\leq 5 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned}
(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 &\rightarrow \min \\
x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

21

$$\begin{aligned}
(x_1 - 4)^2 + 3(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\
x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

22

$$\begin{aligned}
(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 &\rightarrow \min \\
x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\
x_1 + x_2 &\leq 5 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

23

$$\begin{aligned}
(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 7)^2 &\rightarrow \min \\
x_1 + 6x_2 &\leq 6 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned}
(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 &\rightarrow \min \\
x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

25

$$\begin{aligned}
(x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\
x_1 + 5x_2 &\leq 5 \\
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Пример контрольной работы №3

1. Решить симплекс-методом задачу ЛП, предварительно приведя ее к каноническому виду.

$$\begin{aligned}
 &x_1 - x_2 - x_3 + ax_4 \rightarrow \max \\
 &-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\
 &bx_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 12 \\
 &2x_1 + cx_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6; \\
 &x_j \geq 0, \overline{j=1,4}
 \end{aligned}$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	3	-1	6	5	2	3	11	2	1	2	16	3	3	1
2	3	1	1	7	4	3	6	12	3	3	4	17	4	1	2
3	4	2	-1	8	6	1	5	13	5	2	-1	18	3	1	0
4	7	2	3	9	2	2	2	14	7	1	5	19	4	1	3
5	8	3	4	10	5	3	7	15	6	3	8	20	5	2	6

Пример контрольной работы №4

1. Определить задачу, двойственную к задаче:

$$\begin{aligned}
 L(\bar{X}, M) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \\
 x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n+m.
 \end{aligned}$$

2. Найти оптимальное значение целевой функции исходной задачи, путем графического решения двойственной задачи:

$$\begin{aligned}
 &x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \rightarrow \max, \\
 &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\
 &x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11, \\
 &x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

3. Исследовать, является ли решением задачи линейного программирования вектор:

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 14x_4 \rightarrow \max, \\
 &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\
 &x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 \leq -2, \\
 &x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3, 4, \\
 &\bar{X} = (0, 1, 1, 0).
 \end{aligned}$$

4. Привести примеры двойственных пар, обладающих следующими свойствами.

- 1) обе задачи имеют решения;
- 2) одна задача имеет неограниченное допустимое множество, вторая – пустое множество;
- 3) допустимые множества обеих задач пустые;
- 4) допустимые множества обеих задач неограниченные.

Пример контрольной работы №5

1. Решить следующую транспортную задачу:

$a_i \backslash b_j$	51	37	84	58	145
71	3	6	4	6	4
87	1	1	5	3	5
75	3	2	8	8	1
85	8	2	1	3	6
57	5	4	3	3	3

Пример контрольной работы №6

1. Методом деления отрезка пополам и методом золотого сечения найти решение следующих задач.

- 1) $f(x) = x^3 - 3\sin x \rightarrow \min, \quad x \in [0,1], ;$
- 2) $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \rightarrow \min, \quad x \in [-1,0],$
- 3) $f(x) = e^x + \frac{1}{x} \rightarrow \min, \quad x \in [0,5;1,5],$
- 4) $f(x) = x^2 + e^{-x} \rightarrow \min, \quad x \in [0,1],$
- 5) $f(x) = x^2 + x + \sin x \rightarrow \min, \quad x \in [-1;0],$
- 6) $f(x) = x^2 - x + e^{-x} \rightarrow \min, \quad x \in [0;1],$
- 7) $f(x) = \sin x \rightarrow \min, \quad x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}],$
- 8) $f(x) = (x - 2)^2 \rightarrow \min, \quad x \in [0;3],$
- 9) $f(x) = (x + 5)^4 \rightarrow \min, \quad x \in [-6;2],$
- 10) $f(x) = \cos x \rightarrow \min, \quad x \in [0; \pi],$
- 11) $f(x) = (x - 15)^2 + 5 \rightarrow \min, \quad x \in [12;20],$
- 12) $f(x) = xe^x \rightarrow \min, \quad x \in [-2;0],$
- 13) $f(x) = x^2 + 2x - 4 \rightarrow \min, \quad x \in [-2;1],$
- 14) $f(x) = x^3 - x \rightarrow \min, \quad x \in [0;1],$
- 15) $f(x) = x^5 - x^2 \rightarrow \min, \quad x \in [0;1],$
- 16) $f(x) = -\frac{x}{e^x} \rightarrow \min, \quad x \in [0;3],$

- 17) $f(x) = x^4 - x \rightarrow \min, \quad x \in [0;1],$
- 18) $f(x) = \frac{x^4}{\ln x} \rightarrow \min, \quad x \in [1.1;1.5],$
- 19) $f(x) = xe^{-x} \rightarrow \min, \quad x \in [-2;6],$
- 20) $f(x) = xe^{-2x} \rightarrow \min, \quad x \in [-2;6],$
- 21) $f(x) = (x - 10)^2 + 4 \rightarrow \min, \quad x \in [8;12],$
- 22) $f(x) = (x - 5)^4 + 10 \rightarrow \min, \quad x \in [3;6],$
- 23) $f(x) = 2\cos x \rightarrow \min, \quad x \in [0;\pi],$
- 24) $f(x) = -\frac{x}{e^x} \rightarrow \min, \quad x \in [0;3],$
- 25) $f(x) = \frac{x^4}{\ln x} \rightarrow \min, \quad x \in [1.1;1.5].$

Содержание отчета

- цель работы;
- таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации,
- соотношение длины интервала на $k - 1$ итерации к длине интервала на k итерации;
- график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности ε ;
- выводы по всем пунктам задания.

Пример контрольной работы №7

1. Для следующих функций применить методы: покоординатного спуска, наискорейшего спуска или сопряженных градиентов, Ньютона-Рафсона:

1. $(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (3,4)$
2. $(x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (4,3)$
3. $(x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,3)$
4. $(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,2)$
5. $(x_2^2 + x_1^2 - 1) + (x_1 + x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (0,3)$
6. $(x_2^2 + x_1^2 - 1) + (x_1 + x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (3,1)$
7. $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (5,1)$
8. $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,5)$
9. $x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (2,0)$
10. $x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,4)$
11. $2(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 - 3x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (3,6)$
12. $2(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 - 3x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (2,5)$
13. $3(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,5)$
14. $3(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,5)$
15. $(x_1^2 - x_2)^2 + (2 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,3)$
16. $(x_1^2 - x_2)^2 + (2 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (3,3)$
17. $(x_2^2 + x_1^2 - 2) + (x_1 + x_2 - 2)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (0,3)$
18. $(x_2^2 + x_1^2 - 2) + (x_1 + x_2 - 2)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,3)$
19. $4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,3)$
20. $4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \rightarrow \min, \quad x^0 = (2,5)$
21. $(x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 4)^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (2,5)$
22. $(x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 4)^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (0,5)$
23. $(x_2^2 + x_1^2 - 3) + (x_1 + x_2 - 3)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (0,4)$
24. $(x_2^2 + x_1^2 - 3) + (x_1 + x_2 - 3)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1,4)$

$$25. (x_1^2 - x_2)^2 + (3 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (1, 4)$$

$$26. (x_1^2 - x_2)^2 + (3 - x_1)^2 \rightarrow \min, \quad x^0 = (0, 4)$$

Пример контрольной работы №8

Решить методом возможных и подходящих направлений

1.

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

2

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

6

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

7

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$5x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

8

$$\begin{aligned}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 8)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 5x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned}(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

12

$$\begin{aligned}(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

15

$$\begin{aligned}(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

17

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 + 5)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

18

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

19

$$\begin{aligned}(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned}(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

21

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + 3(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

22

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

23

$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 6x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

24

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

25

$$(x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Пример контрольной работы №9

Решить методом линеаризации Франка Вульфа

1.

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

2

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

6

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

7

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$5x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

8

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

9

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

10

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

11

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

12

$$(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

13

$$2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + x_2 &\leq 5 \\4x_1 + x_2 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

15

$$\begin{aligned}(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\4x_1 + x_2 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + x_2 &\leq 7 \\3x_1 + x_2 &\leq 9 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

17

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 + 5)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

18

$$\begin{aligned}(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\2x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\x_1 + x_2 &\leq 4 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

19

$$\begin{aligned}(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 &\rightarrow \min \\x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\5x_1 + x_2 &\leq 5 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

20

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

21

$$(x_1 - 4)^2 + 3(x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

22

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

23

$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 7)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 6x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

24

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

25

$$(x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Пример контрольной работы №10

1. Найти экстремали для простейшей задачи вариационного исчисления

№ вар.	Условие
1.	$J(y) = \int_0^1 \dot{y}^2 dx \rightarrow \text{extr}; y(0) = 1, y(1) = 0$
2.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - y) dx \rightarrow \text{extr}; y(0) = 0, y(1) = 0$
3.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + xy) dx \rightarrow \text{extr}; y(0) = 0, y(1) = 0$

4.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - x^2 y) dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(1) = 0$
5.	$J(y) = \int_1^e x \dot{y}^2 dx \rightarrow extr; y(1) = 0, y(e) = 1$
6.	$J(y) = \int_0^1 (1+x) \dot{y}^2 dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(1) = 1$
7.	$J(y) = \int_2^3 (x^2 - 1) \dot{y}^2 dx \rightarrow extr; y(2) = 0, y(3) = 1$
8.	$J(y) = \int_0^1 y^2 \dot{y}^2 dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(1) = \sqrt{2}$
9.	$J(y) = \int_0^{4/3} \frac{y}{\dot{y}^2} dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(\frac{4}{3}) = \frac{1}{9}$
10.	$J(y) = \int_0^1 e^y \dot{y}^2 dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(1) = \ln 4$
11.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + \dot{y}y + 12xy) dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(1) = 0$
12.	$J(y) = \int_0^1 (x^2 \dot{y}^2 + 12y^2) dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(1) = 1$
13.	$J(y) = \int_{-1}^1 (\dot{y}^2 + y^2) dx \rightarrow extr; y(-1) = 1, y(1) = 1$
14.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + y^2 + 4y \operatorname{sh} x) dx \rightarrow extr; y(0) = -1, y(1) = 0$
15.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + y^2 + 4y \operatorname{ch} x) dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(1) = 0$
16.	$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{y}^2 - y^2) dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 0$
17.	$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{y}^2 - y^2 + 4y \cos x) dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$
18.	$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{y}^2 - y^2 - 4y \sin x) dx \rightarrow extr; y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$
19.	$J(y) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y} dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
20.	$J(y) = \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y} dx \rightarrow extr; y(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, y(1) = 1$
21	$J(y) = \int_0^{4/3} \frac{y}{\dot{y}^2} dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(\frac{4}{3}) = \frac{1}{9}$

22	$J(y) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
23	$J(y) = \int_2^3 (x^2 - 1)y^2 dx \rightarrow extr; y(2) = 0, y(3) = 1$
24	$J(y) = \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{y}{y^2} dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(\frac{4}{3}) = \frac{1}{9}$
25	$J(y) = \int_0^1 y^2 \dot{y}^2 dx \rightarrow extr; y(0) = 1, y(1) = \sqrt{2}$

2. Найти экстремали для задачи Больца

№ вар.	Условие
1.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - y) dx - \frac{y^2(1)}{2} \rightarrow extr$
2.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + y^2) dx - 2y(1) \operatorname{sh}(1) \rightarrow extr$
3.	$J(y) = \int_0^{\pi} (\dot{y}^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi) \rightarrow extr$
4.	$J(y) = \int_0^{\pi/2} (\dot{y}^2 - y^2) dx + y^2(0) - y^2(\frac{\pi}{2}) + 4y(\frac{\pi}{2}) \rightarrow extr$
5.	$J(y) = \int_0^{\pi/2} (\dot{y}^2 - y^2 - 2y) dx - 2y^2(0) - y^2(\frac{\pi}{2}) \rightarrow extr$
6.	$J(y) = \int_0^{e-1} (1+x)\dot{y}^2 dx + 2y(0)(y(e-1)+1) \rightarrow extr$
7.	$J(y) = \int_1^2 x^2 \dot{y}^2 dx - 2y(1) + y^2(2) \rightarrow extr$
8.	$J(y) = \int_1^e 2(x\dot{y}^2 + \dot{y}y) dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e) \rightarrow extr$
9.	$J(y) = \int_0^3 4y^2 \dot{y}^2 dx + y^4(0) - 8y(3) \rightarrow extr$
10.	$J(y) = \int_0^1 e^y \dot{y}^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)} \rightarrow extr$
11.	$J(y) = \int_0^3 4\dot{y}^2 y^2 dx + y^4(0) - 8y(3) \rightarrow extr$
12.	$J(y) = \int_0^1 \dot{y}^2 dx + 4y^2(0) - 5y^2(1) \rightarrow extr$
13.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + y^2) dx - 2y(1) \operatorname{sh} 1 \rightarrow extr$
14.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + y^2) dx - 2y^2(1) \rightarrow extr$

15.	$J(y) = \int_0^1 e^{x+1} (\dot{y}^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1) \rightarrow extr$
16.	$J(y) = \int_0^1 e^y \dot{y}^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)} \rightarrow extr$
17.	$J(y) = \int_1^e 2(xy^2 + \dot{y}y) dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e) \rightarrow extr$
18.	$J(y) = \int_0^\pi (\dot{y}^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi) \rightarrow extr$
19.	$J(y) = \int_0^1 e^y \dot{y}^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)} \rightarrow extr$
20.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - y) dx - \frac{y^2(1)}{2} \rightarrow extr$
21	$J(y) = \int_0^1 e^{x+1} (\dot{y}^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1) \rightarrow extr$
22	$J(y) = \int_1^e 2(xy^2 + \dot{y}y) dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e) \rightarrow extr$
23	$J(y) = \int_0^{e-1} (1+x)\dot{y}^2 dx + 2y(0)(y(e-1) + 1) \rightarrow extr$
24	$J(y) = \int_0^\pi (\dot{y}^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi) \rightarrow extr$
25	$J(y) = \int_1^2 x^2 \dot{y}^2 dx - 2y(1) + y^2(2) \rightarrow extr$

Контрольные засчитываются при условии, что правильно выполнено более 80% задания: правильно проведена формализация задачи; правильно выбран метод решения; правильно проведены расчеты.

Перечень лабораторных работ

Лабораторная работа № 1. Составление вычислительных схем и соответствующих программных реализаций методов одномерной оптимизации.

Лабораторная работа № 2. Составление вычислительных схем и соответствующих программных реализаций методов безусловной оптимизации.

Лабораторная работа № 3. Составление вычислительных схем и соответствующих программных реализаций методов условной оптимизации.

Лабораторные работы должны быть реализованы на одном из языков программирования, должен быть приведен тест, на котором тестировалась программа, и результат тестирования. Это необходимые условия для сдачи лабораторных.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств.

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:

- 1) знание учебного материала и владение аппаратом первых трех разделов;
- 2) Выполнение первых пяти контрольных работ;
- 3) умение исследовать простейшие задачи оптимизации на основе необходимых и достаточных

условий;

4) решать произвольные задачи линейного программирования.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие критерии:

- знание учебного материала всех разделов;
- умение использовать базовые методы решения задач безусловной оптимизации;
- умение использовать базовые методы решения задач условной оптимизации;
- уметь искать допустимые экстремали в задачах вариационного исчисления.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа, обучающегося всем перечисленным критериям.	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым из перечисленных показателей.	–	Неудовлетворительно

Перечень вопросов к зачету (КИМ №1)

1. Переписать эквивалентно данную задачу оптимизации:

- в стандартной форме;
- с ограничениями в виде неравенств;
- с ограничениями равенствами.

2. Решить графически данную задачу

3. Решить ЗЛП симплексным методом.

4. Построить двойственную задачу к заданной ЗЛП.

5. Проверить на оптимальность данную точку, используя дифференциальный вариант теоремы Куна-Таккера.

6. Проверить на оптимальность данную точку, используя условие оптимальности Джона.

7. Решить транспортную задачу

Перечень вопросов к экзамену (КИМ №2)

Примеры задач оптимизации и их формализация (задача Эвклида; задача планирования производства; задача Дидоны; задача оптимального быстрого действия; комбинаторные задачи). Классификация задач оптимизации.

Постановка задачи математического программирования. Основные определения, различные формы записи. Постановка исходной задачи с помощью функции Лагранжа. Определение двойственной задачи.

Необходимые и достаточные условия оптимальности. Задачи с ограничениями – равенствами. Принцип Лагранжа. Расширенная функция Лагранжа. Связь с классическим принципом Лагранжа. Задачи с ограничениями – неравенствами. Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий экстремума. Задача общего вида. Определение седловой точки функции Лагранжа. **Достаточное** условие экстремума в терминах седловой точки.

Задачи выпуклого программирования (ЗВП). Определения выпуклых функций, выпуклого

множества, выпуклых задач. Теоремы об отделимости (о строгой отделимости точки от множества, об опорных гиперплоскостях, об отделимости двух множеств). Теорема Куна-Таккера (в терминах седловой точки). Дифференциальный вариант теоремы Куна-Таккера. Условие оптимальности Ф.Джона. Возможные и подходящие направления. Условие оптимальности в ЗВП в терминах возможных и подходящих направлений. Задачи с линейными ограничениями. Эквивалентное определение возможных направлений. Лемма Фаркаша. Теорема Куна-Таккера в задачах с линейными ограничениями.

Численные методы одномерной оптимизации. Метод золотого сечения, метод деления отрезка пополам, метод секущих, метод Ньютона.

Численные методы многомерной безусловной оптимизации. Покоординатный спуск, градиентные методы (с постоянным шагом, с дроблением шага, наискорейший спуск). Проблемы овражности, "застывание" наискорейшего спуска. Исправление градиентных процедур поиска – методы сопряженных направлений (общая схема, метод Пауэлла, метод Флетчера – Ривса). Метод Ньютона. Метод многогранника.

Методы условной оптимизации. Методы, использующие линеаризацию исходной задачи (метод секущих плоскостей, метод линеаризации). Методы, гарантирующие поиск допустимых точек (методы возможных направлений, метод проекции градиента), методы, обеспечивающие переход к безусловной оптимизации (внешние и внутренние штрафные функции).

Задачи линейного программирования. Графическое решение, симплексный метод, метод искусственного базиса. Элементы теории двойственности (правила построения двойственных задач, основные свойства пары двойственных задач, первая и вторая теоремы двойственности, использование теорем двойственности для проверки заданной точки на оптимальность).

Задачи вариационного исчисления. Простейшая задача. Принцип вариации исследования задач. Необходимое условие слабого экстремума в терминах вариации функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Частные случаи уравнения Эйлера. Задача Больца (без ограничений). Использование метода вариаций с целью получения необходимых условий слабого экстремума. Задача Лагранжа. Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий слабого экстремума. Задачи со старшими производными. Уравнение Эйлера.

Задачи оптимального управления. Общая постановка задачи оптимального управления. Примеры. Простейшая задача оптимального управления. Получение необходимых условий минимума с помощью использования принципа Лагранжа. Принцип максимума Понтрягина.